Depuis des siècles, l'Occident en quête d'harmonie a recherché des canons de beauté, des clés divines pour comprendre« l'ordre du monde ». L'une d'entre elles est « le nombre d'or ». Avant que l'imagination ne prenne le dessus et fasse le lien entre des domaines autonomes -science et mystique-, il s'agit de connaître sa source mathématique : voyage rationnel dans l'irrationnel...

Pour certaines personnes, toute écriture mathématique est rébarbative. Je les encourage à s'accrocher patiemment: le voyage décrit -culturellement et techniquement- est un des plus forts vécus par notre culture. Se l'approprier est une fête. L.A.

LE NOMBRE D'OR : LE RATIONNEL IRRATIONNEL

Marie Milis

Le nombre d'or se rencontre dans l'observation de la nature et celle des oeuvres d'art : on le retrouve dans l'arrangement spiralé des graines de tournesol comme dans la disposition des feuilles de chêne ou de pommiers le long de leur tige. Certains le retrouvent en musique et dans l'artisanat populaire de civilisations aussi variées que les Amérindiens Kwakiutl contemporains et les artisans grecs du 6e s. avant J.Chr. [1]. La peinture et l'architecture pullulent d'exemples où ce nombre peut être reconnu. L'architecte londonien Richard Watson a étudié les attributs du nombre d'or et de son équivalent tridimensionnel « le nombre plastique ». [2] Dans une lettre récente, B.E. Clement me signale retrouver ce nombre en électromagnétisme. [3]

La présence du « nombre d'or » est recherchée parce qu'elle est généralement perçue comme garante d'une harmonie parfaite. Ce nombre a acquis un statut quasi magique. En 1509 -durant la Renaissance-, Piero delle Francesca a demandé à Pacioli, moine franciscain et mathématicien, d'écrire un manuel à ce sujet à l'usage pratique du peintre. Son ouvrage, illustré par Leonardo da Vinci, fut appelé : « Divina proportione ». Leonardo da Vinci, quant à lui, utilise l'expression « sectio aurea ».

De quel or s'agit-il ?

Que cette proportion soit qualifiée d'« or » ou « divine » nourrit l'imagination. Chacun y va de sa compréhension en investissant ce mot porteur des métaphores et émotions les plus hautes. La présence du nombre d'or devient la trace tangible du divin et de son mystère. Les mystiques anciens ont attaché leur faveur au nombre d'or en raison de sa présence obsédante dans le pentagone étoilé, le pentacle auquel les Grecs attribuaient une valeur symbolique. Les Pythagoriciens -secte religieuse, mystique et scientifique secrète fondée par Pythagore à Crotone en 529 avant J.Chr.- utilisaient le pentagramme (fig.12) comme signe de reconnaissance entre eux.

Quant à Euclide, premier mathématicien à avoir établi un véritable traité intitulé « Les Eléments » (environ 300 av. J.Chr.), il mentionne ce que nous appelons le nombre d'or mais sans y porter un intérêt privilégié : il étudie les pentagones et décagones avec ni plus ni moins de soins que les triangles, quadrilatères et autres polygones. Il ne prend pas la peine de désigner ce nombre par un nom particulier. En somme, Euclide fait figure de savant positif. [4]

Chacun est conscient que tous les nombres et toutes les expressions utilisées par la science s'inscrivent dans deux langues : la langue maternelle et la langue scientifique, technique, précise et synthétique. Que l'on pense seulement à l'écart qu'il y a entre le Big Bang de nos imaginaires et l'événement décrit en astronomie, entre l'Un mystique perçu comme l'Univers, Dieu ou la fusion des époux et le nombre jalon qui sert à compter... Tous nos mots sont lourds d'images... (*)

Hésiode (8ème s. avant J.Chr.) a été le premier témoin du mythe très ancien de l'« Age d'Or » dont le contenu imaginaire de pureté et d'harmonie a probablement servi à qualifier le nombre « d'or ». Ce mythe est lié au temps cyclique : la révolution des astres et leur retour à leur conjonction initiale instituant une succession des âges. Le cycle de révolution de la lune, découvert par Méton, a fait une telle impression que le nombre désignant l'année dans ce cycle était inscrit en or sur les colonnes d'un temple dédié à Minerve. C'est le premier « nombre d'or », n'ayant aucun lien avec celui que nous analysons ici. Ce que nous appelons nombre d'or est une proportion, une grandeur et un nombre... dont l'or n'a rien à voir avec le métal liquide.

Les qualificatifs d'« or » et de « divin » sont résolument dûs aux propriétés -et aux contextes dans lesquels elles ont été découvertes et explorées- de ce fameux nombre que Kepler qualifiait de « joyau de la géométrie ». (Il est bon de se rappeler que jusqu'à la fin du XIXe siècle géomètre était encore synonyme de mathématicien). Il est donc nécessaire de mettre de côté tous les prodiges attribués à ce nombre pour le voir à l'oeuvre et le connaître dans son fonctionnement technique.

Le bâton de Phidias

Une histoire raconte que Phidias -sculpteur qui a imposé le programme architectural du Parthénon [5], construit entre 447 et 438 avant J.Chr. [6] se promenait dans les rues d'Athènes avec un bâton et demandait à tous de lui désigner un point qui divise le bâton (AB) harmonieusement en deux parties non identiques. Avec étonnement il vit presque toujours apparaître le même point (M) tel que (fig.1 et 2) :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$$

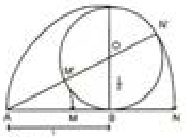


fig. 1

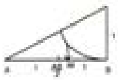


fig. 2

Ce point M est défini par le rapport qu'un calcul (**) montre égal à

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

quelle que soit la longueur du bâton. Ce nombre, désigné par la lettre grecque φ (phi) par allusion à Phidias, est appelé « nombre d'or » :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il exprime la division du segment AB en « moyenne et extrême raison », c'est-à-dire que le point M est tel qu'un segment est la somme des deux autres

$$AB = AM + MB$$

et que la longueur d'un des segments est la moyenne géométrique des longueurs des deux autres

$$AM^2 = AB \times MB$$

Notons que cette remarquable double propriété de la division par φ est approximativement inscrite dans nos index (fig.3).

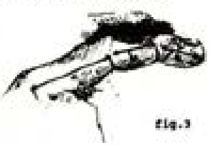


fig.3

$a + b = c$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Malgré cela, son esthétique mathématique et son pouvoir utilitaire parlaient sans doute plus aux Grecs, ainsi qu'aux géomètres et aux architectes de tous temps qu'à l'intuition contemporaine plus associée aux nombres qu'aux segments.

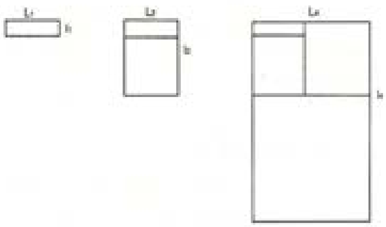
Une classe dessine des rectangles

Aussi, nous allons observer une autre propriété de φ avant d'en chercher la valeur (que vaut ?).

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si dans un groupe (une classe par exemple) chacun dessine un rectangle, puis construit un carré sur la longueur de ce rectangle (fig.4) [7] et continue de la sorte : les largeurs (ln) et les longueurs (Ln) arriveront à dépasser n'importe quelle grandeur. Les suites des largeurs et des longueurs augmentent sans cesse, elles tendent vers l'infini.

fig. 4



(*)
Dans *Zéro, un concept mathématique du vide ?*, j'observe les différentes occurrences techniques de zéro et leur lien avec le discours philosophique. Paru dans : Proceedings of the International Buddhist Conference, Japanese Temple, Bodhgaya, 1991, et dans Initiations, numéro 5/6 (*Le Silence*), printemps 1991. Un autre article consacré aux images porteuses en mathématiques est en préparation.

(**)
Comme $AB^2 = AM\,(AB + AM)$
si A B est de longueur a et A M de longueur a/k, alors l'expression

$$AB^2 = AM\,(AB + AM)$$

s'écrit donc $a^2 = \frac{a}{k}\left(a + \frac{a}{k}\right)$

$$a^2 = \frac{a^2}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

c.à.d. $1 = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

ou $k = 1 + \frac{1}{k}$

ou $k^2 = k + 1$

ou encore :

$$k^2 - k - 1 = 0$$

équation dont les solution sont

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Si A B est de longueur 1

alors A O est de longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}$

La longueur A M = A M vaut

donc $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\varphi}$

La longueur A N[1] = A N vaut

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \varphi$$

(***)

Outre le calcul algébrique simple, il y a lieu ici de développer une récurrence et un passage à la limite. A chaque étape, la longueur du rectangle (L_n) est égale à la longueur du rectangle précédent (L_{n-1}) augmentée de la largeur du rectangle précédent (l_{n-1}).

$$L_n = L_{n-1} + l_{n-1}$$

La largeur du rectangle à la nème étape (l_1) est égale à la longueur du rectangle à l'étape précédente

$$l_n = L_{n-1}$$

Le coefficient de forme à l'étape n est donc

$$k_n = \frac{L_n}{l_n}$$

$$= \frac{L_{n-1} + l_{n-1}}{l_{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{l_{n-1}}{L_{n-1}}$$

$$k = 1 + \frac{1}{k_{n-1}}$$

Les coefficients de forme se rapprochent de plus en plus d'une certaine valeur k ($\lim_{n \to \infty} k_n = k_n$)

telle que $$k = 1 + \frac{1}{k}$$

ç.à.d. $$k^2 = k + 1$$

ou encore :

$$k^2 - k - 1 = 0$$

équation du second degré en k qui a deux racines :

$$k_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{et } k_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Seul k (positif) est retenu comme valeur de convergence de la suite des coefficients de forme.

Aborder φ par l'observation de rapports de grandeur est une idée grecque (que l'on dépasse toutefois dans la mise en oeuvre de son traitement, notamment lors du passage à la limite).

Si à chaque étape on calcule le rapport k_n de la longueur à la largeur -k_n appelé coefficient de forme-

$$k_n = \frac{Ln}{ln}$$

on observe que la suite de ces rapports, loin de tendre elle aussi vers l'infini, converge invariablement vers une valeur proche de 1,618... et ce quelque soit le rectangle de départ (par ex. fig.5).

fig. 5	Ln	ln	$kn = \frac{Ln}{ln}$
1°	5	3	1,666...
2°	8	5	1,6
3°	13	8	1,625
4°	21	13	1,61538....
5°	34	21	1,61904....
6°	55	34	1,61764....
7°	89	55	1,61818....
8°	144	89	1,61797....
9°	233	144	1,61805....
10°	377	233	1,61802....
11°	610	377	1,61803.....

C'est avec une vive curiosité que le groupe -en quête de pourquoi- se donne les outils algébriques de son investigation. (***)

Un rectangle d'or

Après avoir établi que φ est la valeur de convergence de toutes les suites k_n (de coefficients de formes), signalons que si un rectangle a d'emblée un rapport longueur/largeur égale à φ, il est appelé rectangle d'or. Pour le construire, prenons trois segments perpendiculaires, de longueurs égales à un, $AB \perp BC \perp CD$ (fig.6). Construisons ensuite un cercle sur le segment BC (fig.7). Joignons A et D, M et N sont les intersections de AD et du cercle (fig.8) et observons que le rectangle (BMCD) construit à partir de ces segments unitaires est un rectangle d'or ! (fig.9) (2) :

$$\frac{NB}{MB} = \varphi$$

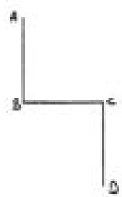


fig. 6

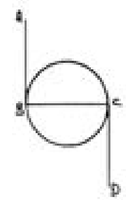


fig. 7

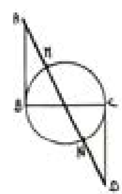


fig. 8

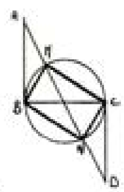


fig. 9

On y retrouve aussi la propriété du bâton de Phidias, la division en extrême et moyenne raison. Le point M est tel que

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AM}{MN} = \varphi$$

Il n'est pas rare d'approcher un concept par ses propriétés. Tant que celles-ci sont spécifiques - et c'est le cas pour φ - elles peuvent toutes servir de définition. Ainsi, nous ne manquons pas de définitions pour φ.

Une longueur d'or

Nous pouvons aussi construire un segment de longueur φ (fig.10) en nous basant sur le théorème de Pythagore pour lequel plus de 370 preuves sont connues.

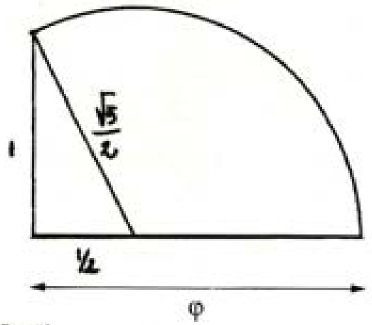


fig. 10

Mais que vaut φ ? Quelle est sa valeur ? Quelle est la mesure de sa longueur ?

Tendre vers une valeur

Observons tout d'abord qu'au tableau de la fig.5, les coefficients de formes « s'approchent » de la valeur de φ alternativement en étant trop grands puis trop petits. Au fur et à mesure qu'une décimale se stabilise, les autres continuent d'encadrer, de plus en plus finement, la valeur de φ qui se précise donc par réduction successive des écarts par défaut et par excès.
La valeur de φ se précise, mais-....que vaut-elle exactement ?

Incroyable ... mais vrai

Dans l'expression calculée pour :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

il faudrait connaître la valeur précise de $\sqrt{5}$ pour connaître φ. Une amie m'a raconté l'émulation qu'elle a ressentie dans une classe d'élèves de 13-14 ans. Toute la classe était convaincue qu'il doit exister un nombre dont le carré vaut cinq. Avec obstination, les élèves se sont lancés à l'assaut des entiers qu'ils ont vite abandonnés au profit de nombres décimaux. Ils calculaient, calculaient, multipliant chaque fois leur nombre par lui-même pour trouver 5,00000... Leur enthousiasme tournait à l'acharnement. Ils ne voulaient plus arrêter, ce qui éveillait l'impatience des autres professeurs : « Donne leur donc ce nombre - ils font des math à tous les cours ! ». Françoise a parié une machine à calculer avec sa classe que les élèves ne trouveraient pas ce nombre. Malgré cela les élèves ne s'arrêtaient pas. Au contraire ! Finalement, une élève a observé que pour avoir 5,00000 il faudrait que la dernière décimale du nombre proposé soit zéro (seuls 0 x 0 donne le zéro nécessaire pour écrire les décimales de 5,00000). Mais alors la précédente serait aussi zéro, et la précédente, etc.... Elles devraient toutes être zéro. Le nombre serait donc un entier et cela les élèves savaient qu'aucun entier multiplié par lui-même donne cinq. La classe -enfin convaincue- a regardé l'écriture $\sqrt{5}$ avec de nouveaux yeux. On dit que c'est un nombre, appelé réel, on l'utilise dans des calculs mais son existence est à la fois irréfutable et intangible. Chaque élève a reçu une « machine à écrire » (un crayon) pour marquer cette rencontre.

Reste à s'interroger sur la nature d'une quantité qui sans cesse se précise (fig.5), qui n'est jamais totalement définie et qui pourtant est là, manifestée sous nos yeux par une longueur dont l'existence ne peut être mise en question.(fig.10) Pour développer une intuition de la nature de φ, et participer à la radicalité de son altérité par rapport aux nombres qui servent à compter ou à mesurer, explorons quelques figures. Ce faisant, nous suivons le cours de l'histoire.

A la recherche de l'unité de mesure commune à deux segments

La liste des décimales de φ ne s'arrêterait que s'il existait une commune mesure (même très très petite) entre les côtés AB et AM du bâton de Phidias (fig.1 ou 2), c'est-à-dire s'il y avait une unité de longueur -même minuscule- qui entrerait un nombre entier de fois dans la longueur AB et un autre nombre entier de fois dans la longueur AM. Chercher cette commune mesure revient à chercher le plus grand diviseur commun par l'algorithme d'Euclide.
En général, l'algorithme d'Euclide sur deux segments opère de la façon suivante : appelons « a » le plus grand segment et « b » le plus petit. Nous soustrayons a de b, aussi souvent que possible, laissant un reste c, plus petit que b. Nous soustrayons ensuite c de b, aussi souvent que possible, etc. ... Si les segments sont commensurables, le processus s'arrête en donnant la plus grande commune mesure (****). Si les segments sont « incommensurables », le processus continue ad infinitum, et les restes successifs deviennent éventuellement plus petits que n'importe quel segment fini préassigné.

« La descente infinie »

Considérons à présent une figure faite d'une infinité d'octogones réguliers et d'octogrammes étoilés emboîtés (fig.11).

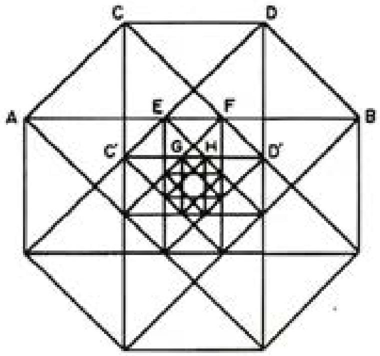
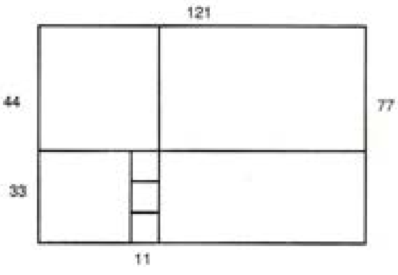


fig. 11

Du fait que A C D E et F C D B sont des parallélogrammes, on a que C D = A E = F B est contenu deux fois dans A B, il reste E F. De

(****)
L'algorithme d'Euclide de recherche du P.G.C.D. (ici de 121 et 77) correspond à la recherche du plus grand pavé carré qui pave un rectangle, c'est-à-dire la commune mesure entre le carré et le rectangle.

	1	1	1	3	
121	77	44	33	11	pgcd
77	44	33	33		
	33	11	0		



plus, C D = C' D', et E F = C' G = H D' est contenu deux fois dans C' D', il reste G H. « La continuation infinie de ce processus devient ainsi évidente ». [8] AB et CD sont donc incommensurables ! [10]

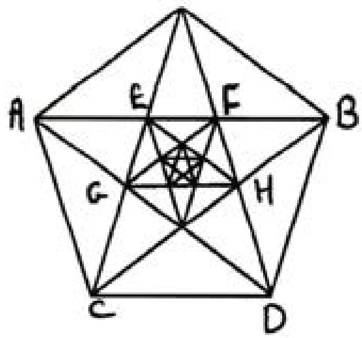
Sur cette figure, nous pouvons visualiser l'impossibilité d'une mesure commune entre AB et CD : aussi loin que l'on continue le processus mis en place ci-dessus, la pensée révèle une infinité d'octogrammes emboîtés. Jamais nous ne tiendrons le bâtonnet, « le constituant élémentaire » qui serait une unité de mesure commune.

Cette figure donne à voir un processus infini tout comme le tableau de la figure 5 le faisait pressentir dans le monde des nombres. Pierre de Fermat (1601-1665) parlait à ce propos de « descente infinie ».

On voit que l'on pourrait infiniment mettre un reste dans un autre. Tous sont là, sous nos yeux, à l'infini. Cet infini, ici actuel, est en tous cas incontournable et force à abandonner l'idée que le point est insécable. Le point ne pourra plus être défini comme une entité en soi mais seulement comme l'intersection de deux droites.

Nombre d'or et incommensurabilité

Comment les Pythagoriciens ont exactement découvert et prouvé l'incommensurabilité reste une question ouverte, étudiée en détail par Knorr [8]. Une des hypothèses, proposée par Von Fritz [9], est que la preuve en était basée sur l'algorithme de division d'Euclide, appelé anthypairesis, appliqué à la figure formée d'une infinité de pentagones et pentagrammes étoilés emboîtés (fig.12).



Les segments incommensurables sur cette figure sont les côtés (C D par ex.) et les diagonales (AB par ex.) des pentagones réguliers qui ont entre eux un rapport en extrême et moyenne raison (appelée proportion dorée). [10]

Mourir pour une idée

Nombreux, par contre, sont ceux qui attribuent la première rencontre des Grecs avec la notion d'incommensurabilité au pythagoricien Hippasus de Metaponte (environ 470 avant J.Chr.) qui a reconnu l'inexistence d'une commune mesure entre le côté et la diagonale du carré.

La légende veut que Hippasus, pour avoir transgressé l'ordre du monde, ait péri noyé dans un naufrage. « Le premier scolie du Livre X des Eléments d'Euclide, en même temps qu'il expose le contenu de la découverte, commente la « légende » en ces termes : « Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants ».

Découvrir l'entité dont le carré vaut 2 (que nous nommons $\sqrt{2}$), ou $\sqrt{5}$, ou φ, c'était entrer dans le lieu où règne la démesure, où s'effacent les contours, où s'accumulent les multiplicités indominables et redoutables, le lieu sans frontières de l'απειρον, (l'infini) ». [11]

Chez les Grecs, les mathématiques étaient une science pure pratiquée par des hommes libres. C'était un art libéral, par opposition aux arts mécaniques dont s'occupaient les gens du peuple et les esclaves [12].

Les Pythagoriciens ne voulaient pas s'occuper des nombres fractionnaires qu'utilisaient cependant les artisans et les commerçants de l'époque pour exprimer des parties d'une unité monétaire ou d'une mesure.

Pour eux, les nombres étaient des essences composées, dont les éléments, essences élémentaires, sont les unités (monades). Ces unités étaient pensées comme des points indivisibles.

La crise de l'a-logos

Puisque la mesure de la diagonale du pentagramme ou du carré par rapport au côté n'est pas exprimable comme rapport d'entiers, « on la déclara inassignable, imprononçable (αρρητοσ), voire sans raison (αλογοσ), car on appelait « raison » (λογοσ) un rapport d'entiers, la logistique étant le calcul sur les entiers et le rapport d'entiers. **La crise des irrationnels débutait.** Ce fut la première crise intellectuelle de l'humanité, car elle établissait, par la seule raison démonstrative, une incohérence du sens commun ». [13] Par après, les Pythagoriciens n'ont plus traité que des grandeurs commensurables. Il a fallu attendre Eudoxe -né à Cnide en Asie Mineure en 408 avant J.Chr.- pour que soit fondée une théorie des grandeurs incommensurables. Exposée au 5ème livre des Eléments d'Euclide, elle consiste essentiellement en la définition et l'étude de l'égalité de deux rapports (appelés raisons) de grandeurs incommensurables. Mais ce qu'on arrivait désormais à faire pour les grandeurs, on n'arrivait pas à le faire pour les nombres. Ces nombres « qui mentent » ont été abandonnés au profit de constructions géométriques à la règle et au compas, sans mesure, sans nombre. Les nombres ont été discrédités de la géométrie. Ils ont mis ensuite vingt-trois siècles à guérir de la blessure de l'irrationalité !

Il a fallu attendre Viète (1540-1603) et Descartes (1596-1650) pour que les nombres et l'algèbre (re)deviennent pour nous -fils de Grecs- des outils fiables de pensée. Puis il a fallu attendre la fin du XIXe siècle et les travaux de Cantor (1845-1918), Dedekind (1831-1916) et Weierstrass (1815-1897) pour que s'opère la totale réconciliation de l'art du géomètre avec l'art des nombres par la formulation d'une base mathématique rigoureuse qui donne rang de **nombre** à ces irrationnels.

Nombre d'or et monade

Pourtant les Pythagoriciens ont maintenu le pentagramme ! Sans doute parce qu'il nous montre comment φ est en essence lié à 1. Outre l'incommensurabilité de ses côtés et diagonales, la figure 12 nous offre une nouvelle écriture de φ, ainsi qu'une propriété remarquable. (*****)

En écrivant le rapport de la diagonale au côté :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AF + FB}{CD}$$

$$= 1 + \frac{FB}{CD}$$

$$= 1 + \frac{FB}{EF + FB}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{EF + FB}{FB}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{EF}{FB}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{EF}{GH}}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(*****)

Si nous donnons à FB la valeur 1, le côté AF prend la valeur φ et le rapport $\frac{AB}{AF}$ vaut lui aussi φ

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AF + FB}{AF} = 1 + \frac{FB}{AF} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

(Ce qui est également déductible de l'équation

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

ou $\varphi^2 = \varphi + 1$

et conduit naturellement à la suite infinie

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$$
$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2$$

ce qui montre que :

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

Dans une progression géométrique de raison φ, un terme est la somme des deux termes de rangs précédentes.

petit à petit se dégage une suite de fractions emboîtées.

Puisque : $\dfrac{AB}{CD} = \varphi$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots\dots\dots}}}}}$$

Le nombre d'or peut donc s'écrire suivant une fraction continue infinie (******) où n'intervient que le chiffre 1 .

φ peut s'écrire à partir de monades- ...ce qui rend son irrationalité plus « acceptable », plus « familière » que celle des autres ! (voir aussi les fig. 9 et 10).

φ est un pont entre l'univers des nombres conçus comme assemblage de monades et celui des nombres processus qui désignent ce vers quoi l'on tend, et leurs équivalents en géométrie : le point unité insécable et l'infiniment petit actuel.

En quelque sorte, φ ouvre l'univers des irrationnels mais à partir de l'unité. Le nombre dit *d'or* offre une réconciliation avec la quête d'unité, la volonté de retrouver l'un dans la multiplicité.

Une autre écriture de φ -plus contemporaine- et issue de l'équation $\varphi^2 = \varphi + 1$ présente φ comme un édifice de radicaux emboîtés à l'infini qui lui aussi ne fait intervenir que le nombre 1.

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots\dots}}}}$$

Rappelons enfin les cinq solides platoniques :
le tétraèdre à 4 faces,
le cube à 6 faces,
l'octoèdre à 8 faces,
le dodécoèdre à 12 faces et
l'icosaèdre à 16 faces.

Emboîtés les uns dans les autres, ils sont tous contenus dans l'icosaèdre.

Richard Watson m'a révélé que si l'on place trois rectangles dorés perpendiculairement les uns aux autres, avec leurs centres communs, la figure formée en joignant leurs sommets est un icosaèdre (fig. 14 dessinée par R. Watson) - autre lien entre le nombre d'or et l'unité.

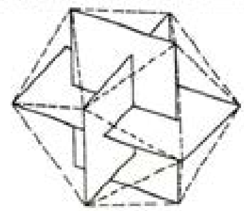


fig. 14

(******)
Observons que la suite des sommes partielles
$1, 1 + \dfrac{1}{1} = 2, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \dfrac{3}{2}, 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} = \dfrac{5}{3}$
tend vers φ par alternance de valeurs trop grandes et trop petites - et met en évidence la suite des nombres de la série de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,....

dont le rapport entre deux termes consécutifs tend vers φ

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots\dots$$

La suite de Fibonacci a été définie à l'occasion de recherches sur la prolifération des lapins par Léonard de Pise, dit Fibonacci, qui naquit vers 1100. Très grand mathématicien, on lui doit probablement l'introduction des chiffres arabes en Europe.

Conclusion

Nombreux sont ceux chez qui l'exploration de tous les contextes dans lesquels le nombre d'or est présent réveille un émerveillement proche de l'enfance intérieure.

Décider -plutôt que de se lancer dans une telle vastitude- de s'en tenir résolument à une approche technique - certains la disent sèche-, non seulement n'a pas atténué le plaisir mais le nourrit et l'enracine.

De plus, la construction de nos processus de pensée scientifique suit à peu près les étapes historiques que notre culture a suivies. Chacun d'entre nous commence par concevoir les nombres comme constitués de monades. Ouvrir notre esprit à une autre sorte de nombre nous fait vivre une expérience d'émerveillement.

[1] György Doczi. The Power of Limits. Proportional Harmonies in Nature, Art and Architecture. Boulder and London (Shambhala), 1981.

[2] Richard Watson. Point of view. The plastic number. The tridimensional equivalent of the number φ, lecture I.R.I.S., Colloque de Genève, 1987 (non publié).

[3] B.E.Clement. A Plausible Explanation of the Golden Ratio in terms of the properties of electromagnetic radiation (non publié).

[4] M. Cleyet-Michaud. Le Nombre d'Or. Paris (PUF), 1978.

[5] Roland Martin, « Phidias », Encyclopaedia Universalis, vol. XIV, p. 439.

[6] B. Holtzmann. « L'Acropole d'Athènes », Enc. Univ., vol. 1, p. 207.

[7] F. Thomas-Van Dieren et N.Rouche. Mesures, pavages et nombres irrationnels. Louvain-La-Neuve (GEM), 1985.

[8] W.R. Knorr. The Evolution of the Euclidean Elements. Dordrecht (D.Reidel), 1975.

[9] K. von Fritz. Discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, Ann. Math. 46, 242-264 (1945).

[10] N.Rouche et F.Thomas-Van Dieren. Octogram versus pentagram in a (not too important) historical dispute, in : Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 20, No. 5/6, pp. 451-452, 1985.

[11] J. Desanti, « Infini mathématique », Encycl. Univ. vol. 9, p. 1122.

[12] M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York (Oxford University Press), 1972.

[13] J. Dhombres, « Nombres Réels », Encycl. Univ., vol. 15, p. 750.

Evans G. Valens. The Number of Things. Pythagorean Geometry and Humming Strings. London (Methuen), 1965.